Lösungen Klausur (Wiederholung) Analysis III

1. Aufgabe: Erste Lösung (kompliziert)

Verwende Polarkoordinaten für x, y: $x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$(r \in [0,1],\ \varphi \in [0, 2\pi])$

Für gegebenes $x = r\cos\varphi$ ist $z^2 \leq 1 - x^2$,
also $z \in [-\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi}, \sqrt{1-r^2\cos^2\varphi}]$.

$$\Rightarrow \text{Volumen} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2\cdot\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi}\ r\,dr\,d\varphi$$

Das r-Integral (für festes φ) lässt sich mit der Substitution $s = r^2\cos^2\varphi$ berechnen:
$r \in [0,1] \Rightarrow s \in [0, \cos^2\varphi]$
und $ds = \cos^2\varphi \cdot 2r\,dr$, man erhält

$$\int_0^{\cos^2\varphi} \frac{1}{\cos^2\varphi}\sqrt{1-s}\,ds = \frac{1}{\cos^2\varphi}\cdot\left[-\frac{(1-s)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\cos^2\varphi}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{1}{\cos^2\varphi}\cdot\left[1 - (1-\cos^2\varphi)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{1}{\cos^2\varphi}\left(1 - |\sin\varphi|^3\right).$$

Auf $\varphi \in [0,\pi]$ (das ist eine Hälfte des Körpers) ist $\sin\varphi \geq 0$, also

$$\text{Volumen} = 2\cdot\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\frac{1-(\sin\varphi)^3}{\cos^2\varphi}\,d\varphi$$

Mit $\int \frac{1}{\cos^2\varphi}\,d\varphi = \tan\varphi$

und (mit $u = \cos\varphi \Rightarrow du = -\sin\varphi\, d\varphi$ sowie $\sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi$
$= 1-u^2$)

$$\int \frac{\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi = -\int \frac{1-u^2}{u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{u} + u = \frac{1}{\cos\varphi} + \cos\varphi$$

folgt

$$\text{Volumen} = 2\cdot\frac{2}{3}\Big[\tan\varphi - \frac{1}{\cos\varphi} - \cos\varphi\Big]_0^{\pi}$$

$$= 2\cdot\frac{2}{3}\big[0+1+1-(0-1-1)\big] = 8\cdot\frac{2}{3} = \frac{16}{3}$$

Bemerkung: Es scheint, als wäre der Integrand

$$I = \frac{1-\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi}$$

bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (wo $\cos\varphi = 0$) unstetig und damit das Integral ~~dort~~ nicht definiert und nicht wie angegeben ausrechenbar.

Das ist aber kein Problem, denn mit $\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}$

ist $\sin\varphi = \cos\psi$, $\cos\varphi = -\sin\psi$, und

mit $\cos\psi = 1 - \psi^2/2 + \dots$, $\sin\psi = \psi - \psi^3/3! \dots$ ist

$$I = \frac{1-(1-\psi^2/2+\dots)^3}{(\psi-\psi^3/3!\dots)^2} = \frac{1-1+\psi^2/2\cdot 3 - \dots}{\psi^2\cdot(1-\psi^2/6\dots)^2} = \frac{\frac{3}{2} - \dots}{1-\dots}$$

wobei ... höhere ψ-Potenzen bedeuten, also I nahe $\psi = 0$, d.h. $\varphi = \frac{\pi}{2}$, stetig, sogar C^∞, fortsetzbar.

1. Aufgabe, zweite Lösung (einfach)

Der Körper ist $\{(x,y,z) : -1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$

$-\sqrt{1-x^2} \le z \le \sqrt{1-x^2}\}$

Also

$$\text{Volumen} = \int_{-1}^{1} \underbrace{2\sqrt{1-x^2}}_{=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy} \cdot \underbrace{2\sqrt{1-x^2}}_{=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz} \, dx$$

$$= 4\int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = 4\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

$$= 4\left[\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right] = \frac{16}{3}.$$

2.) a) φ injektiv: Falls $\varphi(u,v) = \varphi(u',v')$, so folgt $u^2 = (u')^2$, $v^2 = (v')^2$, also $u = u'$, $v = v'$ wegen $u, u', v, v' > 0$.

φ Immersion: $\partial_u \varphi = \begin{pmatrix} 2u \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\partial_v \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}$

diese sind offenbar für $u \neq 0, v \neq 0$ linear unabhängig.

b) Die Gram-Determinante ist

$$g_\varphi = \det \begin{pmatrix} \|\partial_u \varphi\|^2 & (\partial_u \varphi, \partial_v \varphi) \\ (\partial_u \varphi, \partial_v \varphi) & \|\partial_v \varphi\|^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1+4u^2 & 1 \\ 1 & 1+4v^2 \end{pmatrix}$$

$$= 4u^2 + 4v^2 + 16u^2v^2,$$

die Fläche ist also

$$\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{g_\varphi(u,v)}\, du\, dv = 2 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{u^2 + v^2 + 4u^2v^2}\, du\, dv$$

c) Der Tangentialraum wird von $\partial_u \varphi, \partial_v \varphi$ aufgespannt.

Also $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\}$

3) Sei χ_ε die charakteristische Funktion von $K_\varepsilon(0)$.

Es gilt $\chi_\varepsilon f \to 0$ punktweise fast überall $(\varepsilon \to 0)$ (*)

und $|\chi_\varepsilon f| \leq |f|$.

Nach dem Satz über die Integration bei majorisierter Konvergenz / Satz von Lebesgue)

folgt $\int \chi_\varepsilon f \to \int 0 = 0 \quad (\varepsilon \to 0)$

Wegen $\int \chi_\varepsilon f = \int_{K_\varepsilon(0)} f$ ist das die Behauptung.

(*) Begründung: Dies gilt für alle $x \neq 0$, denn für $\varepsilon < \|x\|$ ist $(\chi_\varepsilon f)(x) = 0$.

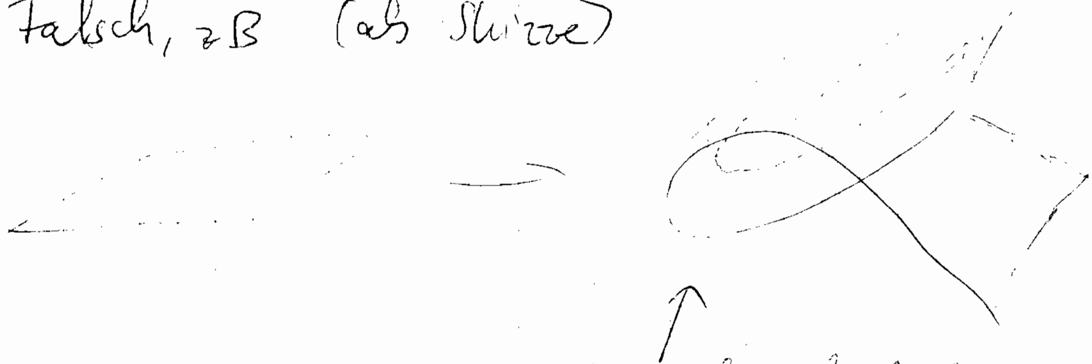
4) a) Falsch, z.B. $f_k(x) = \chi_{[k,k+1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = 0.$$

Es gilt $\int f_k = 1 \not\to \int f = 0$, aber $f_k \to f$ punktweise.

(Damit es stimmt, muss man annehmen, dass es eine integrierbare Funktion g gibt mit $|f_k| \le g$ für alle k.
Also erstens: dasselbe g für alle k
und zweitens: Konstanten $\neq 0$ sind über $\mathbb{R}^n$ nicht integrierbar!)

b) Falsch, z.B (als Skizze)



Sich selbst durchdringende Fläche.

c) Richtig.

Beweis: $\gamma(1)-\gamma(0) = \int_0^1 \gamma'(t)\,dt$

$$\Rightarrow \|\gamma(1)-\gamma(0)\| \le \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\,dt \le \int_0^1 1\cdot dt = 1.$$